



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年专注教育行业

全品智能作业

QUANPIN ZHINENGZUOYE

进阶手册

知识 · 易错 · 拓展

主 编 肖德好

高中数学

必修第一册 RJA

CONTENTS 目录

进阶手册

第一章 集合与常用逻辑用语

- 1.1 集合的概念 进 01
- 1.2 集合间的基本关系 进 02
- 1.3 集合的基本运算 进 04
- 1.4 充分条件与必要条件 进 06
- 1.5 全称量词与存在量词 进 08

第二章 一元二次函数、方程和不等式

- 2.1 等式性质与不等式性质 进 09
- 2.2 基本不等式 进 11
- 2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 进 14

第三章 函数的概念与性质

- 3.1 函数的概念及其表示 进 17
- 3.2 函数的基本性质 进 20
- 3.3 幂函数 进 23
- 3.4 函数的应用（一） 进 26

第四章 指数函数与对数函数

- 4.1 指数 进 30
- 4.2 指数函数 进 32
- 4.3 对数 进 36
- 4.4 对数函数 进 38
- 4.5 函数的应用（二） 进 42

第五章 三角函数

- 5.1 任意角和弧度制 进 44
- 5.2 三角函数的概念 进 46
- 5.3 诱导公式 进 48
- 5.4 三角函数的图象与性质 进 50
- 5.5 三角恒等变换 进 54
- 5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 进 57
- 5.7 三角函数的应用 进 61

(2) 已知集合 $A = \{0, m, m^2 - 3m + 2\}$, 且 $2 \in A$, 则实数 m 的值为_____.

(3) 已知集合 $A = \left\{0, a + b, \frac{a}{b}\right\}$, $B = \{0, 1 - b, 1\}$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 若 $A = B$, 则 $a + 2b =$ _____.

【答案】 (1) $x \neq 2$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 0$ (2) 3 (3) 1

【解析】 (1) 由集合中元素的互异性, 可知 $\begin{cases} x \neq 2, \\ x^2 - x \neq 2, \\ x^2 - x \neq x, \end{cases}$ 解得 $x \neq 2$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 0$.

(2) 若 $m = 2$, 则 $m^2 - 3m + 2 = 0$, 不满足集合元素的互异性, 舍去; 若 $m^2 - 3m + 2 = 2$, 解得 $m = 3$ 或 $m = 0$, 其中 $m = 0$ 不满足集合元素的互异性, 舍去. 故 $m = 3$.

(3) 由题得 $b \neq 0$. 由 $A = B$, 得 $\begin{cases} a + b = 1, \\ \frac{a}{b} = 1 - b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a + b = 1 - b, \\ \frac{a}{b} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1 \end{cases}$ 或 $a = b = \frac{1}{3}$. 当 $a = 0, b = 1$ 时, 集合 A

中 $\frac{a}{b} = 0$, 与 $\frac{a}{b} \neq 0$ 矛盾; 当 $a = b = \frac{1}{3}$ 时, $A = B = \left\{0, \frac{2}{3}, 1\right\}$, 符合题意. 故 $a + 2b = 1$.

【教材拓展】集合论

集合论是德国数学家康托尔于 19 世纪末创立的. 当时, 康托尔在解决涉及无限量研究的数学问题时, 越过“数集”限制, 提出了一般性的“集合”概念. 关于集合论, 希尔伯特赞誉其为“数学思想的惊人的产物, 在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”, 罗素描述其为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”.

例 3 某高中小伟同学在学习完第一章集合后对高中数学非常感兴趣, 他在图书馆查阅资料后发现在集合论中有“差集”的定义如下: $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

(1) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求 $A - B$;

(2) 若 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, 求 $A - B$.

解: (1) 由 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 得 $A - B = \{1, 3\}$.

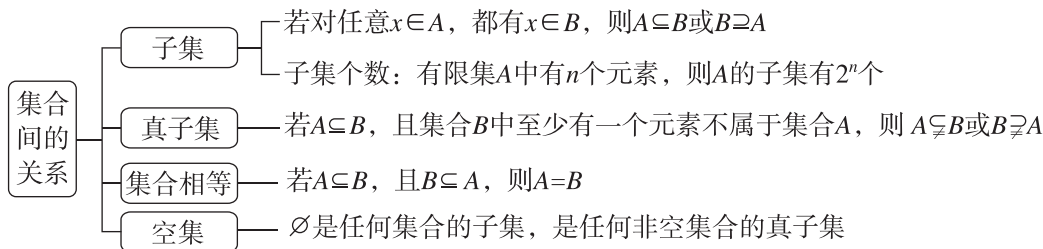
(2) 由 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$,

得 $A - B = \{x | 1 < x \leq 2\}$.

1.2 集合间的基本关系

【层级 1】知识易错易混

【知识导图】



【易错易混】 \emptyset 与 $0, \{0\}, \{\emptyset\}$ 的关系

空集是不含任何元素的集合, 且规定 $\emptyset \subseteq \emptyset$, 任何时候 $x \in \emptyset$ 都不成立.

$\{\emptyset\}$ 不是空集, $\{\emptyset\}$ 中含有一个元素 \emptyset . \emptyset 作为元素, 则 $\emptyset \in \{\emptyset\}$; \emptyset 作为集合, 则 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

$\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合, 与空集不同, $0 \in \{0\}$, $0 \notin \emptyset$, $0 \notin \{\emptyset\}$.

例1 (多选题)下列关系式正确的是

()

A. $0 \notin \emptyset$

B. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

C. $\emptyset \in \{0\}$

D. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

【答案】 ABD

【解析】 对于A,空集中不含有任何元素,故A正确;对于B,空集是非空集合的子集,则 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,故B正确;对于C,应该用“ \subseteq ”符号,即 $\emptyset \subseteq \{0\}$,故C错误;对于D, \emptyset 是集合 $\{\emptyset\}$ 中的元素,即 $\emptyset \in \{\emptyset\}$,故D正确.故选ABD.

层级2 解题方法拓展

【方法解读1】 分类讨论之集合关系求参

已知两集合 A, B ,当 $B \subseteq A$ 时,如果 A 是一个确定的集合,而集合 B 不确定,运算时要考虑 B 为空集的情况,切不可漏掉.

例2 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x < 3\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq a\}$.

(1)若 $A \supsetneq B$,求实数 a 的取值范围;

(2)若 $B \subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

解:(1)由集合 $A = \{x | 1 \leq x < 3\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq a\}$,且 $A \supsetneq B$,可得 $a \geq 3$,

所以实数 a 的取值范围是 $\{a | a \geq 3\}$.

(2)由集合 $A = \{x | 1 \leq x < 3\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq a\}$,

且 $B \subseteq A$,得当 $B = \emptyset$ 时, $a < 1$,满足题意;

当 $B \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} a \geq 1, \\ a < 3, \end{cases}$ 所以 $1 \leq a < 3$.

综上所述, $a < 3$,即实数 a 的取值范围是 $\{a | a < 3\}$.

【方法解读2】 集合子集与真子集个数

求集合子集的个数时,可根据集合中元素的个数来计算,因为集合中有 n 个元素,且每个元素都有两种可能,即在子集中或不在子集中,所以子集有 2^n 个,真子集和非空子集各有 $(2^n - 1)$ 个,非空真子集有 $(2^n - 2)$ 个.

例3 满足关系 $\{1, 2, 3\} \subseteq A \subsetneq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 A 的个数为_____.

【答案】 7

【解析】 方法一(列举法):满足条件的集合 A 可以是 $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\{0, 1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,共7个.

方法二(计数法):由题意得,集合 A 中一定含有 $1, 2, 3$,可能含有 $0, 4, 5$,但不同时含有 $0, 4, 5$,所以集合 A 的个数为 $2^3 - 1 = 7$.

【教材拓展】 强基固本

例4 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,集合 $A \subseteq M$,定义 $M(A)$ 为 A 中元素的最小值,当 A 取遍 M 的所有非空子集时,对应的 $M(A)$ 的和记为 S_6 ,则 $S_6 =$ _____.

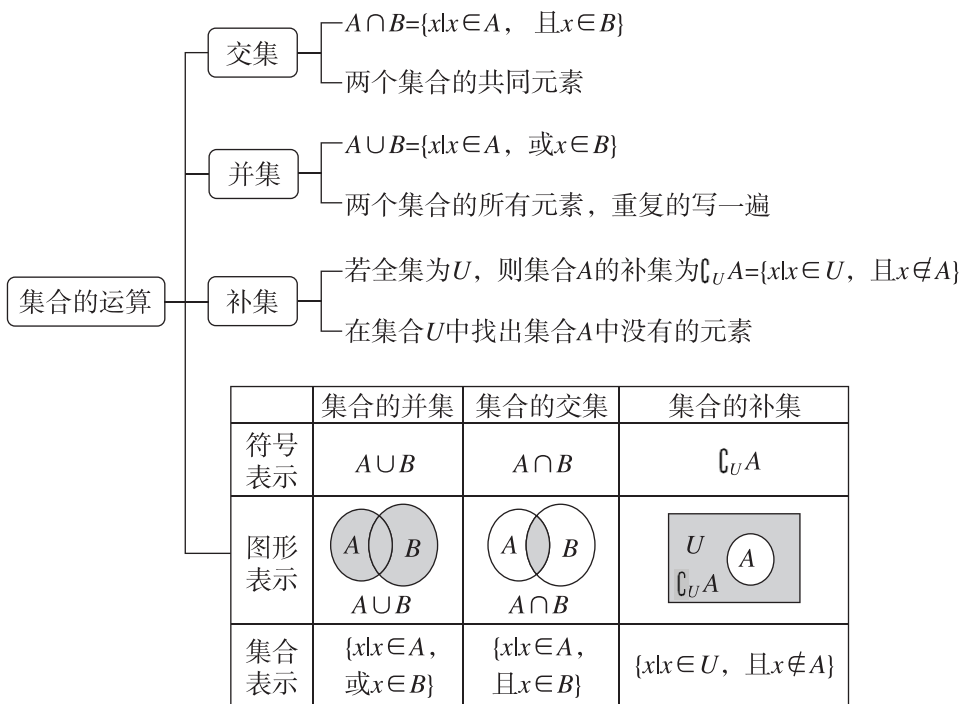
【答案】 120

【解析】 集合 M 的非空子集共有 $(2^6 - 1)$ 个,其中最小值为1的有 2^5 个,最小值为2的有 2^4 个, ..., 最小值为6的有 2^0 个,所以 $S_6 = 2^5 \times 1 + 2^4 \times 2 + 2^3 \times 3 + 2^2 \times 4 + 2^1 \times 5 + 2^0 \times 6 = 120$.

1.3 集合的基本运算

层级1 知识易错易混

【知识导图】



【易错易混】集合运算中忽略对空集的讨论

例 1 设集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 1 - m < x < 2m - 2\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

解: 因为 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$.

① 当 $B = \emptyset$ 时, $1 - m \geq 2m - 2$, 解得 $m \leq 1$;

② 当 $B \neq \emptyset$ 时, 由题得 $\begin{cases} 1 - m < 2m - 2, \\ -2 \leq 1 - m, \\ 2m - 2 \leq 1, \end{cases}$ 解得 $1 < m \leq \frac{3}{2}$.

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left\{m \mid m \leq \frac{3}{2}\right\}$.

层级2 解题方法拓展

【方法解读】数形结合和正难则反

例 2 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N} | 0 \leq x \leq 10\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$, 求集合 B .

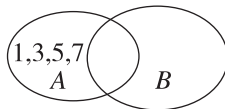
解: 因为 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$,

所以 $1, 3, 5, 7 \in A$, $1, 3, 5, 7 \in \complement_U B$,

所以 $1, 3, 5, 7 \notin B$.

$U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N} | 0 \leq x \leq 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

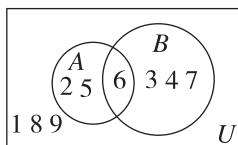
作出 Venn 图, 如图, 由图可知 $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$.



例 3 已知全集 $U = \{x \mid x < 10, x \in \mathbf{N}^*\}$, 且 $A \cap B = \{6\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{3, 4, 7\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{2, 5\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ _____.

【答案】 $\{1, 8, 9\}$

【解析】 由题知全集 $U = \{x \mid x < 10, x \in \mathbf{N}^*\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{6\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{3, 4, 7\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{2, 5\}$, 画出 Venn 图如图所示, 所以 $\complement_U(A \cup B) = \{1, 8, 9\}$.



例 4 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \mid m \leq x \leq m + 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 m 的取值范围为 _____.

【答案】 $\{m \mid -2 \leq m \leq 4\}$

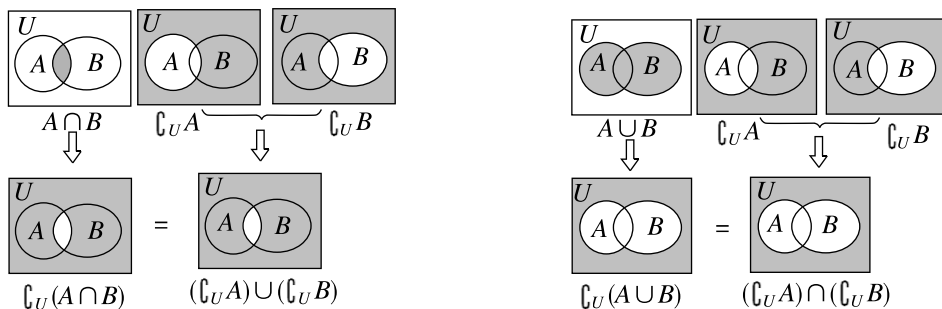
【解析】 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $m + 2 < 0$ 或 $m > 4$, 解得 $m < -2$ 或 $m > 4$, 故当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, 实数 m 的取值范围为 $\{m \mid -2 \leq m \leq 4\}$.

【教材拓展】德·摩根定律和容斥原理

1. 德·摩根定律

$$\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B); \quad \complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B).$$

该法则可借助 Venn 图帮助理解.



2. 容斥原理

在研究集合时, 经常遇到有关集合中元素的个数问题. 我们把含有有限个元素的集合 A 叫作有限集, 用 $\text{card}(A)$ 表示有限集合 A 中元素的个数. 例如 $A = \{a, b, c\}$, 则 $\text{card}(A) = 3$. 把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来, 然后再把计数时重复计算的数目排斥出去, 使得计算的结果既无遗漏又无重复, 这种计数的方法称为容斥原理.

(1) 两个有限集的容斥原理: 一般地, 对于两个有限集 A, B , 我们有 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$;

(2) 三个有限集的容斥原理: 一般地, 对于三个有限集 A, B, C , 我们有 $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(C \cap A) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

例 5 [教材 P35 第 11 题] 学校举办运动会时, 高一(1)班共有 28 名同学参加比赛, 有 15 人参加游泳比赛, 有 8 人参加田径比赛, 有 14 人参加球类比赛, 同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人, 同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人, 没有人同时参加三项比赛. 同时参加田径和球类比赛的有多少人? 只参加游泳一项比赛的有多少人?

解: 设同时参加田径和球类比赛的有 x 人, 则 $28 = 15 + 8 + 14 - 3 - 3 - x$, 解得 $x = 3$,

即同时参加田径和球类比赛的有 3 人,

只参加游泳一项比赛的有 $15 - 3 - 3 = 9$ (人).

传递法:若 p 是 q 的充分条件, q 是 s 的充分条件,即 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow s$,则有 $p \Rightarrow s$,即 p 是 s 的充分条件;

若 p 是 q 的必要条件, q 是 s 的必要条件,即 $q \Rightarrow p, s \Rightarrow q$,则 $s \Rightarrow p$,即 p 是 s 的必要条件;

若 p 是 q 的充要条件, q 是 s 的充要条件,即 $p \Leftrightarrow q, q \Leftrightarrow s$,则 $p \Leftrightarrow s$,即 p 是 s 的充要条件.

集合法:对于带有否定性的命题或比较难判断的命题,常借助集合思想把抽象、复杂问题形象化,直观化.

用集合法判断时,要尽可能用 Venn 图、数轴、直角坐标系等辅助解题,图形的形象、直观能简化解题过程,降低思维难度.

例 2 已知 $p: x > 0, y > 0, q: xy > 0$,则 q 是 p 的 ()

- A. 充分条件
B. 必要条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 由 $x > 0, y > 0$,可得 $xy > 0$,但若 $xy > 0$,不一定可得 $x > 0, y > 0$,也可能 $x < 0, y < 0$.所以 $p \Rightarrow q$,但 $q \not\Rightarrow p$,所以 q 是 p 的必要条件.故选 B.

例 3 “ $x > -1$ ”是“ $x > 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 因为 $\{x | x > 1\} \subsetneq \{x | x > -1\}$,所以“ $x > -1$ ”是“ $x > 1$ ”的必要不充分条件.故选 B.

例 4 已知 p 是 r 的充分不必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件,则下列说法正确的是 ()

- A. r 是 q 的充分不必要条件
B. p 是 q 的充分不必要条件
C. r 是 q 的必要不充分条件
D. r 是 s 的充分不必要条件

【答案】 B

【解析】 由题知 $p \Rightarrow r, r \not\Rightarrow p, q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$,则 $r \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow r$,故 A, C 不正确; $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$,故 B 正确; $r \Rightarrow s$ 且 $s \Rightarrow r$,故 D 不正确.故选 B.

【教材拓展】 强基固本

例 5 条件 $p: \triangle ABC$ 的内心与外心重合,条件 $q: \triangle ABC$ 是正三角形,则 p 是 q 的什么条件?

证明: 充分性:如图,设点 G 既是 $\triangle ABC$ 的外心,也是 $\triangle ABC$ 的内心,

D, E, F 分别是 BC, AB, AC 的中点,

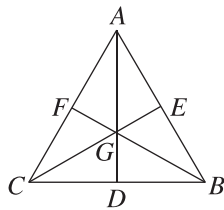
$$\text{则} \begin{cases} AG = CG, \\ FG = FG, \text{则} \triangle AGF \cong \triangle CGF, \text{所以} \angle GAF = \angle GCF, \\ AF = CF, \end{cases}$$

由 AG, CG 是角平分线得 $\angle CAB = \angle ACB$,同理可得 $\angle CAB = \angle CBA$,

则 $\angle CAB = \angle ACB = \angle CBA$,即 $\triangle ABC$ 是正三角形;

必要性:当 $\triangle ABC$ 是正三角形时,角平分线所在直线和三角形的边的中垂线所在直线重合,则其内心和外心重合.

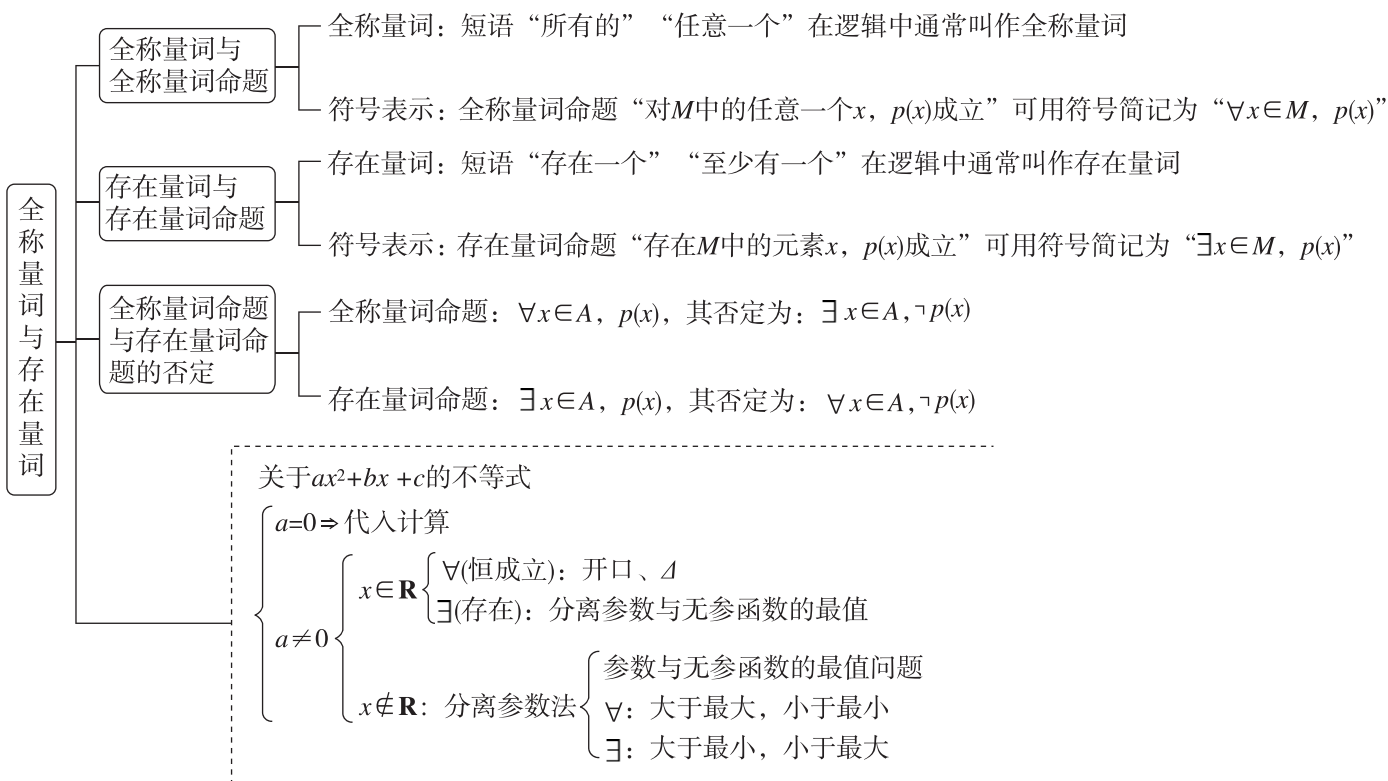
所以 p 是 q 的充要条件.



1.5 全称量词与存在量词

层级1 知识易错易混

【知识导图】



【易错易混】全称量词命题和存在量词命题的判断

全称量词命题是陈述某集合中的所有元素都具有(不具有)某种性质的命题,无一例外,其强调整体和全部;存在量词命题是陈述某集合中有(存在)元素具有(不具有)某种性质的命题,强调个别和部分的特殊性.

层级2 解题方法拓展

【方法解读】恒成立(存在性)问题求参

全称量词“ \forall ”表示任意一个,指的是在指定范围内的恒成立问题,而存在量词“ \exists ”表示存在一个,指的是在指定范围内的有解问题,求参数取值范围是一类重要的题型,通常利用分离参数法或判别式法求解.

例1 已知 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2+2x+a \geq 0, q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2+2ax+1=0$. 若 p 和 q 都是真命题,则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\{a \mid a \leq -1 \text{ 或 } a = 1\}$ B. $\{a \mid a \leq -1 \text{ 或 } 1 \leq a \leq 2\}$
 C. $\{a \mid a \geq 1\}$ D. $\{a \mid -1 \leq a \leq 1\}$

【答案】 C

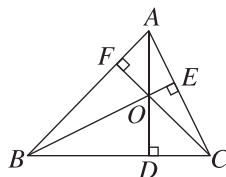
【解析】 已知 p 为真命题,且 $y = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$, 当 $x = -1$ 时, y 取得最小值 $a - 1$, 则 $a - 1 \geq 0$, 所以 $a \geq 1$. 已知 q 为真命题,即 $x^2 + 2ax + 1 = 0$ 有实根,则 $\Delta = (2a)^2 - 4 \times 1 \times 1 \geq 0$, 即 $4a^2 - 4 \geq 0$, 解得 $a \leq -1$ 或 $a \geq 1$. 因为 p 和 q 都是真命题,所以 $a \geq 1$, 即实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \geq 1\}$. 故选 C.

【教材拓展】根据事实写命题

例2 [教材 P35 第 12 题] 根据下述事实,分别写出含有量词的全称量词命题或存在量词命题:

(1) $1=1^2, 1+3=2^2, 1+3+5=3^2, 1+3+5+7=4^2, 1+3+5+7+9=5^2, \dots$

(2) 如图,在 $\triangle ABC$ 中, AD, BE 与 CF 分别为 BC, AC 与 AB 边上的高,则 AD, BE 与 CF 所在的直线交于一点 O .



解: (1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.

(2) 任意三角形的三条高交于一点.